

Optimisation sous contrainte et multiplicateur de Lagrange : Part# 1

En économie, le multiplicateur de Lagrange permet de déterminer une situation optimale (par exemple comment maximiser son profit, minimiser ses dépenses, ou encore maximiser bien-être) sous une contrainte quelconque (budget limité, bien-être minimum requis...). Chaque jour en tant que consommateur, vous résolvez dans votre tête un Lagrangien, en répondant à la question "quelle quantité de chaque bien vais-je acheter pour maximiser mon bien-être, étant donné ma contrainte budgétaire ?". Chaque jour, les producteurs aussi y vont de leur petit Lagrangien, en se demandant par exemple "pour produire un bien supplémentaire, vais-je acheter une machine ou embaucher un nouveau salarié, étant donné le rendement de chacun et ma contrainte actuelle de trésorerie ?".

D'un point de vue technique, et même si la méthode d'optimisation du Lagrangien peut faire un peu peur au début, il n'y a absolument rien de compliqué (allez, il faut savoir faire une dérivé partielle, c'est tout...). Mais avant de l'expliquer mathématiquement, nous allons essayer de comprendre l'idée qui se cache derrière ce problème d'optimisation. Pour cela Eric, mettons nous en situation ! Supposons donc l'exemple d'un consommateur qui arrive au restaurant et à le choix entre deux biens : des canettes de coca et/ou des hamburgers (welcome chez les petits gros...). Sur le marché, un hamburger coûte 4 euros, et une canette de coca coûte 2 euros. Notre cher consommateur a un budget de 16 euros par jour pour manger. Etant donné cela, il a donc le choix entre diverses combinaisons : acheter (1) 8 canettes de coca et 0 hamburger , (2) 6 canettes de coca et 1 hamburger, (3) 4 canettes de coca et 2 hamburgers, (3) 2 canettes de coca et 3 hamburgers ou (4) 4 hamburgers et 0 canette de coca. Pour trouver quelle est la consommation optimale pour lui, notre consommateur va essayer de mesurer le bien-être (ce que l'on appelle en économie "l'utilité") des quatre options possibles, et choisir l'option qui maximise son bien-être tout en respectant sa contrainte de budget.

La première chose à bien comprendre dans notre problème, c'est que le bien-être apporté par la consommation d'une unité supplémentaire d'un bien est décroissant. Qu'est ce que cela signifie ? Simplement que lorsque votre consommation de coca-cola augmente, passant de 0 canette à 1 canette, alors le bien-être apporté par cette première canette sera très grand et vous évitera de mourir de soif. Par contre, le bien-être additionnel que vous procure une hausse de consommation de 7 à 8 canettes de coca-cola sera très faible. Donc pour une même hausse de quantité (+1 canette) et le même coût (2 euros en moins dans votre portefeuille), votre bien-être n'augmente pas dans la même manière. D'un point de vue économique, on dit alors que l'utilité marginale d'un bien est décroissante ; le bien-être procurée par chaque dose supplémentaire d'un bien consommé va en diminuant, et devient nulle à partir d'un certain seuil appelé "point de satiété".

Cette relation non-linéaire du bien-être permet d'introduire ce que l'on appelle les courbes d'indifférence, qui représentent toutes les combinaisons de deux biens vous apportant le même bien être final (la même utilité totale). Sur le graphique ci-dessous, nous voyons le cas d'un consommateur qui se dit que pour lui, le bien-être apporté par la consommation de 8 bananes et de 2 pommes est le même que le bien-être procuré par 4 bananes et 4 pommes, mais aussi le même que s'il mange 2 bananes et 8 pommes. Les trois points sont situés sur cette même courbe d'indifférence.

Pour un même individu, il existe donc une infinité de courbe d'indifférence ; chaque courbe représentant

l'ensemble des combinaisons de deux biens procurant au consommateur un niveau de bien-être identique. Plus on s'éloigne de l'ordonnée à l'origine, plus le bien-être total est grand ; par exemple sur le graphique, le bien être d'un consommateur sur la courbe bleue est supérieur au bien-être sur la courbe rouge. C'est logique, il consomme davantage de quantité des deux biens sur cette courbe bleue...

Mais le but d'un consommateur n'est pas simplement de maximiser son utilité (car dans ce cas, il faut simplement consommer le plus possible jusqu'à atteindre satiété pour l'ensemble des biens), mais de maximiser son utilité sous contrainte budgétaire. L'idée va donc être d'aller chercher la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'ordonnée à l'origine, tout en respectant son budget. Pour cela, il faut donc introduire une droite de budget, représentant la quantité de chaque bien que l'on peut acheter étant donné son budget total. Dans notre exemple coca / burgers, cela correspond aux différentes combinaisons possible: (1) 8 canettes de coca et 0 hamburger , (2) 6 canettes de coca et 1 hamburger, (3) 4 canettes de coca et 2 hamburgers, (3) 2 canettes de coca et 3 hamburgers ou (4) 4 hamburgers et 0 canette. C'est la droite en rouge ci-dessous.

Vous commencez à voir comment trouver la consommation optimale ? Et bien c'est assez simple, le but est de maximiser l'utilité sous contrainte budgétaire, c'est à dire en fait trouver la courbe d'indifférence la plus éloignée possible de l'ordonnée à l'origine (de 0) mais qui reste tout de même sur la ligne rouge de contrainte budgétaire. Graphiquement, le point optimale est donc trouvé lorsque la droite de contrainte budgétaire est tangente à la courbe d'indifférence.

Sur le graphique ci-dessus, on retrouve donc pour les biens X et Y notre contrainte budgétaire (droite noire) et 4 courbes d'indifférence. Etant donné la contrainte, la consommation optimale se trouve au point C. Pourquoi ce n'est pas A, B ou D par exemple ? Car en B, l'ensemble du budget est utilisé, mais on se trouve sur une courbe d'indifférence plus basse qu'en C, donc le bien-être en B est inférieur au bien-être de C pour un même niveau de dépense. Idem en A, on ne maximise pas l'utilité et on ne respecte pas au passage notre contrainte budgétaire. En D, le bien être serait supérieur au bien-être en C, mais on ne respecte pas la contrainte budgétaire, donc ce point n'est pas atteignable (vous n'avez pas assez d'argent pour atteindre la consommation des deux biens en D).

Conclusion: Voilà donc comment trouver graphiquement et intuitivement la solution de notre problème. Mais lorsque cela devient plus complexe, quelques notions de mathématiques et l'utilisation de la méthode de Lagrange permettent de répondre précisément à ce type de questions concernant la maximisation ou minimisation d'une fonction sous contrainte quelconque. Rendez-vous donc vendredi pour une petite session de mathématiques (update: article en ligne "La méthode du Lagrangien en économie : #Part 2").